Pavel Obdržálek, MAII, úkol č. 6

$$\int_0^5 \left|x^2 - 3x + 2\right| dx \tag{1}$$

Nejprve si určíme kořeny rovnice $x^2 - 3x + 2 = 0$, tj. $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$.
Rozdělíme si podle toho náš integrál na součet tří integrálů dle těchto úseků:

$$\int_0^5 \left|x^2 - 3x + 2\right| dx = \int_0^1 \left|x^2 - 3x + 2\right| dx + \int_1^2 \left|x^2 - 3x + 2\right| dx + \int_2^5 \left|x^2 - 3x + 2\right| dx$$

Každý integrál si rozložíme na součty integrálů sčítanců:

$$\left|\int_0^1 x^2 dx - 3\int_0^1 x dx + 2\int_0^1 dx\right| + \left|\int_1^2 x^2 dx - 3\int_1^2 x dx + 2\int_1^2 dx\right| +$$

$$+ \left|\int_2^5 x^2 dx - 3\int_2^5 x dx + 2\int_2^5 dx\right|$$

Použijeme 2. ZVA:

$$\left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + 2\left[x\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 2\left[x\right]_1^2\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5 - 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5 + 2\left[x\right]_2^5\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{1^3}{3} - 0\right] - 3\left[\frac{1^2}{2} - 0\right] + 2\left[1 - 0\right]\right| + \left|\left[\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right] - 3\left[\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right] + 2\left[2 - 1\right]\right| +$$

$$+ \left|\left[\frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right] - 3\left[\frac{5^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right] + 2\left[5 - 2\right]\right|$$

Vysčítáme:

$$\left|\frac{5}{6}\right| + \left|\frac{-1}{6}\right| + \left|\frac{27}{2}\right| = \frac{29}{2}$$

$$x \in \langle 0, 5\rangle$$

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 + 3\sin^2 x} dx \tag{2}$$

Víme, že $\sin^2 x$ si můžeme přepsat jako $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$:

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 + 3\sin^2 x} dx = 2\int_0^\pi \frac{1}{5 - 3\cos 2x} dx$$

Abychom se zbavili vnitřní funkce $2x$, můžeme zvětšit meze:

$$2\int_0^\pi \frac{1}{5 - 3\cos 2x} dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\cos x} dx = 2\int_0^\pi \frac{1}{5 - 3\cos x} dx$$

Provedeme substituci $u = \tan\frac{x}{2}$ ($du = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, limity integrace u: 0 a ∞):

$$2\int_0^\pi \frac{1}{5 - 3\cos x} dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{1 + 4u^2} du$$

Použijeme známý integrál:

$$2\int_0^\infty \frac{1}{1+4u^2}du = [\arctan(2u)]_0^\infty$$

A resubsituujeme

$$[\arctan(2u)]_0^\infty = \left[\arctan\left(2\tan\frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi$$

Aplikujeme 2. ZVA:

$$\left[\arctan\left(2\tan\frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi = -\frac{\pi}{2}$$

$$x \in \langle 0, \pi \rangle$$

$$\int_1^e x^2 \ln x dx \tag{3}$$

Provedeme integraci per partes ($u = \ln x$, $dv = x^2 dx$, $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{x^3}{3}$):

$$\frac{1}{3}\left[x^3 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx$$

Použijeme 2. ZVA a vysčítáme:

$$\frac{1}{3}\left[x^3 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{1}{3}\left(e^3 - \ln 1\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}\left(2e^3 + 1\right)$$

$$x \in \langle 1, e \rangle$$